Wurde die Lotterie bei den Hungerspielen manipuliert?[1]

Kyle Caudle und Erica Daniels, Rapid City, USA

[1] Original: Did the Gamemakers Fix the Lottery in the Hunger Games?
In: Teaching Statistics 37 (2) (2015), S. 37–40.
Übersetzung: Anna Schäfer, Paderborn

Zusammenfassung: *Die Hungerspiele sind eine jährlich stattfindende Veranstaltung in dem fiktionalen Land Panem. Jedes Jahr werden 24 Jugendliche aus den 12 Distrikten durch eine Lotterie ausgewählt, um in der Freilichtarena zur Unterhaltung der Bewohner des Kapitols bis auf den Tod zu kämpfen. Mit Hilfe statistischer Analysen und Computersimulationen untersuchen wir, ob es möglich ist, dass die Lotterie manipuliert wurde. Anhand fiktiver Daten aus Suzanne Collins' Buch „Die Tribute von Panem – Tödliche Spiele", zeigen wir wie Lernende erste Erfahrungen mit der Durchführung eines Permutationstest sammeln können.*

1 Einleitung

Panem ist ein fiktionales Land in der entfernten Zukunft, das nach dem Zusammenbruch der USA entstand. Es besteht aus 13 Gebieten, den sogenannten Distrikten und dem Kapitol. Aufgrund der zunehmenden Ausbeutung durch das Kapitol revoltierten die Distrikte. Der blutige Bürgerkrieg endete mit der Zerstörung des 13. Distriktes und der erneuten Unterwerfung der anderen zwölf Distrikte. Als Strafe für den Aufstand wurden die Hungerspiele eingeführt.

Jährlich werden seither ein Junge und ein Mädchen zwischen 12 und 18 Jahren aus jedem Distrikt durch eine Lotterie ausgewählt, um an den Hungerspielen teilzunehmen. Diese Jugendlichen, genannt Tribute, kämpfen zur Unterhaltung der Bewohner des Kapitols bis zum Tode. Ein Jugendlicher, der nicht bei der Lotterie ausgewählt wurde, kann dabei freiwillig für einen anderen teilnehmen. Genau das macht die Romanheldin, Katniss, die sich freiwillig als Ersatz für ihre jüngere Schwester Prim meldet. In den reicheren Distrikten (Distrikt 1, 2 und 4) werden Jugendliche sogar speziell für die Spiele trainiert und nehmen dann freiwillig teil. Diese Freiwilligen werden Karrieros genannt.

Der letzte Überlebende in der Arena gewinnt die Hungerspiele, und als Preis bekommt sein Distrikt im folgenden Jahr zusätzliche Lebensmittel. Die Familie des Tributs erhält Verpflegung und Schutz für das restliche Leben des Jugendlichen. Die von Panems Polizei kontrollierte starke Beschränkung der Versorgung mit Waren und Gütern führt dazu, dass die Bewohner der meisten Distrikte mittellos und nah am Hungern leben. Jugendliche zwischen 12 und 18 Jahren haben indessen die Möglichkeit zusätzliche Lebensmittelrationen für sich und ihre Familie zu erhalten. Dazu müssen sie ihren Namen ein weiteres Mal in die Lotterie geben. Sie können höchstens so viele zusätzliche Rationen bekommen, wie sie Familienmitglieder haben. Dabei müssen sie für jede Ration einen zusätzlichen Namenseintrag in die Lotterie geben.

In diesem Artikel werden die Ziehungsergebnisse dieser Lotterie analysiert und untersucht, ob diese manipuliert wurde. Dafür verwenden wir die Daten der 74. Hungerspiele aus dem Roman von Suzanne Collins (2010), die von Keller (2012) zusammengetragen wurden.

2 Die Lotterie

Die Wahrscheinlichkeit bei der Lotterie ausgewählt zu werden hängt für jeden Jugendlichen von zwei Faktoren ab: Seinem Alter und der Anzahl zusätzlicher Rationen, die er verlangt hat. Nach den Regeln der Lotterie wird der Name eines Jugendlichen im Alter von 12 Jahren einmal in die Lotterie eingetragen. Wenn sie nicht gewählt wurden, erhalten sie im nächsten Jahr einen weiteren Eintrag, so dass sie dann insgesamt zwei Einträge besitzen. Dieser Ablauf wiederholt sich bis zu dem Alter von 18 Jahren, so dass dann sieben Einträge zusammen kommen. Tabelle 1 fasst die Anzahl der Einträge zusammen, die ein ausgewählter Jugendlicher altersbedingt nach den Regeln der Lotterie hat.

Alter (Jahre)	Einträge	Anteil
12	1	$\frac{1}{28}$
13	2	$\frac{2}{28}$
14	3	$\frac{3}{28}$
15	4	$\frac{4}{28}$
16	5	$\frac{5}{28}$
17	6	$\frac{6}{28}$
18	7	$\frac{7}{28}$

Tab. 1: Lotterie-Einträge nach Alter

Man kann nun die altersbezogenen Anteile der Lotterieeinträge in der dritten Spalte als Wahrscheinlichkeit auffassen, dass ein Jugendlicher in diesem Alter entsprechend der Lotterieregeln ausgewählt wird.[1]

Gemäß der Romanvorlage waren unter den 24 jugendlichen Teilnehmern der Hungerspiele sieben Karrieros, die nicht durch die Lotterie ausgewählt wurden, sondern sich freiwillig gemeldet haben. Auch die Romanheldin Katniss nahm freiwillig als Ersatz für ihre 12jährige Schwester Prim teil, weshalb wir bei der Analyse der Daten Prims und nicht Katniss' Alter berücksichtigt haben.

Demnach kennen wir das Alter von 17 Jugendlichen, die durch die Lotterie ausgewählt wurden. Mit Hilfe der Tabelle 1 können wir die erwarteten absoluten Häufigkeiten ausgewählter Jugendlicher in jedem Alter ermitteln. Abb. 1 stellt beide Anzahlen gegenüber.

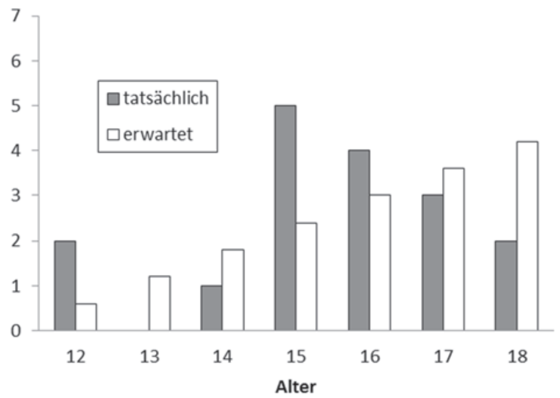

Abb. 1: Tatsächliche versus erwartete absolute Häufigkeiten

Bei Betrachtung der Abb. 1 erkennt man, dass sich die erwartete und tatsächliche Verteilung, insbesondere für das Alter von 15 und 18 Jahren, unterscheidet. Wir nutzen diese Daten, um Lernenden zu zeigen, wie man einen Randomisierungstest mittels Simulation durchführt. Deren Interesse an der Verfilmung der Tribute von Panem macht dieses zu einem besonders guten Beispiel zur Einführung von Randomisierungstests.

3 Randomisierungstests

Sawilowsky (2005) hat bemerkt, dass Lernende Schwierigkeiten haben, das Prinzip der Zufallsauswahl zu verstehen und dieser daher misstrauen. Wir sind davon überzeugt, dass die Randomisierung ein machtvolles statistisches Werkzeug ist, das im Unterricht genutzt werden sollte, um Lernenden ein intuitives Gefühl für Variabilität zu vermitteln. Diese Idee kann einfach mit Hilfe eines Spielkartensatzes in einem handlungsorientierten Unterricht vermittelt werden, (s. dazu das ausgezeichnete Unterrichtsbeispiel in Enders et al. 2006). Als Vorstufe des komplizierteren Randomisierungstests, den wir für die Analyse der Lotterie der Hungerspiele benötigen, stellen wir im Folgenden zunächst ein einfaches Beispiel vor um das Testverfahren zu demonstrieren.

3.1 Ein erstes Beispiel

Wir stellen uns vor, die Hauptfigur Katniss und ihr Freund Gale jagen Eichhörnchen. Laut der Romanvorlage unterscheiden sich beide Jugendlichen nicht in ihren Jagdfähigkeiten. Doch an einem Tag erlegt Katniss vier Eichhörnchen und Gale kein einziges. Ist es dennoch richtig, dass beide die gleichen Jagdfähigkeiten haben? Wenn es keinen Unterschied in ihren Fähigkeiten gibt, hat jeder von ihnen die gleiche Chance eines der Eichhörnchen zu erlegen. Somit gibt es $2^4 = 16$ Möglichkeiten, die vier Eichhörnchen unter ihnen aufzuteilen. Von diesen 16 möglichen Ausgängen gibt es nur eine (günstige) Möglichkeit, in der Katniss alle vier Eichhörnchen erlegt. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{1}{16}$ (6,025 %). Es ist also nicht sehr wahrscheinlich, dass Katniss alle Tiere erlegt, unter der Voraussetzung, dass ihre Jagdfähigkeiten gleich denen von Gale sind. Daher könnte dies eine falsche Annahme sein.

Betrachten wir nun ein anderes Szenario, in dem es für Katniss im Vergleich zu Gale doppelt so wahrscheinlich ist, die Eichhörnchen zu töten. Um dies zu untersuchen, nehmen wir 3 Karten und schreiben auf zwei davon „Katniss" und auf eine „Gale". Um das Erlegen eines Eichhörnchens zu simulieren, ziehen wir eine der drei Karten. Für die drei weiteren Eichhörnchen legen wir die erste Karte zurück und ziehen erneut eine Karte usw. Gegenüber den Lernenden sollte hervorgehoben werden, dass die Karte wieder zurückgelegt werden muss, um die ursprüngliche Annahme, dass Katniss, das Eichhörnchen mit doppelter Wahrscheinlichkeit erlegt, jedes Mal zu erfüllen. In diesem Szenario gibt es $3^4 = 81$ mögliche Ausgänge und $2^4 = 16$ Möglichkeiten, dass Katniss' Name jedes Mal gezogen wird, d. h. dass sie alle Eichhörnchen erlegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür wäre dann $\frac{16}{81}$, also rund 20 %. Weil diese Wahrscheinlichkeit relativ groß ist, verwerfen wir die Annahme, dass Katniss im Vergleich zu Gale die Eichhörnchen doppelt so wahrscheinlich erlegt, nicht.

3.2 Die Lotterie der Hungerspiele

Bei der Lotterie der Hungerspiele interessiert uns die Frage: Ist die Altersverteilung der (74.) Hungerspiele mit den im Roman beschriebenen Regeln der Lotterie vereinbar? Da es entgegen dem vorherigen Beispiel nicht möglich ist, jede der möglichen Anordnungen (d. h. Lotterieauslosungen) zu betrachten, möchten wir einen Randomisierungstest mittels wiederholter Stichprobenziehung durchführen – ein ausgezeichneter Weg um Lernende mittels einer einfachen Aufgabe aktiv in den Unterrichtsprozess mit einzubeziehen.

Dazu nehmen wir 28 Karten und schreiben die Nummer 12 auf eine der Karten, die Nummer 13 auf zwei Karten usw., so dass sie den Altersanteilen in Tabelle 1 entsprechen. Dann lassen wir die Lernenden eine Stichprobe der Größe 17 ziehen, wobei wieder darauf zu achten ist, dass die Stichprobe mit Zurücklegen gezogen wird, damit die Anteile konstant bleiben. Nach jedem Zug soll die gezogene Nummer (das Alter) notiert werden.

Nun fragen wir die Lernenden, wie viele 12en sie gezogen haben. Mit großer Wahrscheinlichkeit wird die Anzahl zwischen 0 und 1 liegen. Wir fragen weiter, wie viele 12-jährige sie in ihrer Stichprobe der Größe 17 ungefähr haben sollten. Anders gesagt: Ist 1 wahrscheinlich? Was ist mit 5? Oder 10? Sie sollten überlegen, dass die erwartete absolute Häufigkeit $\frac{1}{28} \cdot 17 \approx 0{,}61$ ist. Somit wäre 1 oder 2 plausibel, aber sicher nicht 10.

Die tatsächlich beobachtete Anzahl sollte in jeder Altersgruppe dicht bei der erwarteten absoluten Häufigkeit liegen, sonst wären die Regeln der Lotterie nicht befolgt worden. Wir fragen die Lernenden, wie sie die Unterschiede zwischen den erwarteten und tatsächlichen Anzahlen über alle Altersgruppen messen könnten. Folgende Impulse können hilfreich sein: Können wir einfach die Differenzen aufaddieren? Was ist, wenn einige der Differenzen negativ sind? Die Lernenden können selbst ausprobieren und so eine sinnvolle Methode finden, um mit einem einzelnen Wert zu messen, wie weit die tatsächlichen von der erwarteten Anzahlen in jeder Kategorie entfernt liegen.

Eine Standard-Technik um die ‚Nähe' zu ermitteln ist der Chi-Quadrat-Anpassungstest. Diese Methode nutzt auch Keller (2012). Für die Hungerspiele ist diese Methode jedoch nicht geeignet, da alle erwarteten Anzahlen kleiner als fünf sind (Marx et al. 2006). Doch obwohl der Chi-Quadrat-Anpassungstest nicht durchgeführt werden kann, ist die Chi-Quadrat-Teststatistik ein gutes Maß, um die Nähe zwischen den Stichprobenanteilen und den theoretischen ermittelten Werten zu bestimmen. Die Chi-Quadrat-Teststatistik nimmt die quadrierten Differenzen zwischen den Stichprobenwerten und den theoretischen Werten und normalisiert diese durch Division durch den theoretischen Wert:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \tag{1}$$

wobei O_i die tatsächliche Anzahl in der Stichprobe mit den Kategorien $i = 1, 2, \ldots, k$ und $E_i = n \cdot p_i$ die auf der Basis der theoretischen Anteile p_i erwartete Häufigkeit in jeder Kategorie für eine Stichprobe der Größe n.

Um den auf den Romandaten basierenden Wert der Teststatistik zu berechnen, benötigen wir die tatsächlichen und erwarteten Anzahlen (Tabelle 2).

Alter (Jahre)	Anteil	tatsächliche Anzahl	erwartete Anzahl
12	$\frac{1}{28}$	2	0,61
13	$\frac{2}{28}$	0	1,21
14	$\frac{3}{28}$	1	1,82
15	$\frac{4}{28}$	5	2,43
16	$\frac{5}{28}$	4	3,04
17	$\frac{6}{28}$	3	3,64
18	$\frac{7}{28}$	2	4,25

Tab. 2: Tatsächliche versus erwartete Anzahl

Neben den bereits erwähnten Annahmen (Berücksichtigung von Prims Alter statt Katniss' Alter; Karrieros werden nicht berücksichtigt) basieren die Anzahlen in der Tabelle 2 auf der folgenden Annahme: Die Anzahl der Kinder im Alter von 12 Jahren, die jedes Jahr in die Lotterie aufgenommen werden, ist in etwa gleich der Anzahl derjenigen, die die Lotterie verlassen, weil sie nun 19 Jahre alt sind. Dadurch bleibt die Gesamtanzahl der Jugendlichen in der Lotterie von Jahr zu Jahr annähernd gleich.

Mit den Daten aus der Tabelle 2 und der Gleichung (1) ergibt sich folgender Wert der Teststatistik:

$$Q = \frac{(2-0{,}61)^2}{0{,}61} + \frac{(0-1{,}21)^2}{1{,}21} + \ldots + \frac{(2-4{,}25)^2}{4{,}25} = 9{,}11 \tag{2}$$

Nun lassen wir die Lernenden zu ihren eigenen Stichproben der Größe 17 die Teststatistik berechnen. Damit sie einen besseren Eindruck von der Variabilität der Teststatistik ihrer Stichprobe erhalten, wird diese Aufgabe mehrmals wiederholt. Anschließend fragen wir, wie sich ihre Teststatistiken mit der Teststatistik zu den Roman-Daten (9,11) vergleichen lassen.

Insbesondere fragen wir, ob ihre Simulationen einen Hinweis darauf liefern, dass die Lotterie manipuliert wurde.

3.3 Computer Simulationen

Mit der Hilfe des Computers ziehen wir schließlich 1000 zufällige Stichproben der Größe 17 aus der theoretischen Verteilung (Tabelle 1).[2] Für jede der 1000 Stichproben berechnen wir eine Stichproben-Teststatistik entsprechend der Gleichung (1). Wir beobachten dann, wie viele der Stichproben-Teststatistiken gleich 9,11 oder größer sind. In der von uns durchgeführten Simulation haben wir 169 solcher Stichproben erhalten. Daraus schlussfolgern wir, dass es unter der Voraussetzung der im Roman beschriebenen Regeln für die Lotterie eine 16,9 %ige Wahrscheinlichkeit gibt, die bei den Hungerspielen aufgetretenen tatsächlichen Anzahlen oder noch extremere Anzahlen zu erhalten. Da diese Wahrscheinlichkeit relativ groß ist, liefern die Daten keine Evidenz für eine Manipulation der Lotterie.

Wir müssen aber eingestehen, dass der obige Test nicht realistisch ist, da er die zusätzlichen Lotterieeinträge aufgrund der Extra-Rationen nicht berücksichtigt. Durch die Romanlektüre ist uns klar, dass ältere Jugendliche mit größerer Wahrscheinlichkeit Extra-Rationen fordern. Für diese Annahme gibt es mehrere Gründe. Erstens benötigen ältere Jugendliche mehr Lebensmittel, sobald sie ein Alter erreichen, indem sie stark wachsen. Zweitens beginnen sie sich für ihre Geschwister verantwortlich zu fühlen, so dass sie sich verpflichtet fühlen, zusätzliche Rationen anzufordern. Und zuletzt wird in dem Roman geschildert, dass viele Familien aufgrund der gefährlichen Arbeitsbedingungen ohne Vater leben, so dass (ältere) Jugendliche wahrscheinlicher zusätzliche Rationen fordern.

Wir nehmen daher abschließend an, dass Jugendliche zwischen 12 und 15 Jahren noch keine zusätzlichen Rationen fordern. Im Alter von 16, 17 oder 18 Jahren soll ein Jugendlicher einen zusätzlichen Lotterieeintrag aufgrund der Extra-Ration bekommen und dafür ein zusätzliches Los in Kauf nehmen. Wir räumen ein, dass diese Annahmen möglicherweise die fiktionale Situation nicht genau erfassen, aber sie sind für uns mit Blick auf den Roman zumindest plausibel. Tabelle 3 fasst die neuen Anzahlen der Lotterie-Einträge zusammen.

Auf der Basis dieser Anteile haben wir die erwarteten Anzahlen neu berechnet und damit eine neue beobachtete Teststatistik bestimmt. Diese liefert den Wert 12,55. Die Durchführung eines Randomisierungstests zeigte in unserer Simulation von 1000 zufälligen Stichproben 48mal Teststatistiken, die so groß oder noch größer waren als die beobachtete Teststatistik. Dies entspricht einem Anteil von 0,048. Da dieser Wert relativ klein ist, schlussfolgern wir auf der Basis unserer neuen Annahmen, dass wir Evidenz für eine Manipulation der Lotterie gefunden haben.

Alter (Jahre)	Einträge	Anteil
12	1	$\frac{1}{34}$
13	2	$\frac{2}{34}$
14	3	$\frac{3}{34}$
15	4	$\frac{4}{34}$
16	6	$\frac{6}{34}$
17	8	$\frac{8}{34}$
18	10	$\frac{10}{34}$

Tab. 3: Lotterie-Einträge mit zusätzlichen Rationen

4 Schlussfolgerungen

Randomisierungstests sind eine ausgezeichnete Alternative zu Chi-Quadrat-Tests wenn die Voraussetzung der Mindestgröße der erwarteten Häufigkeiten nicht erfüllt ist. Computer-Simulationen sind dabei eine gute Möglichkeit um Lernenden zu zeigen, was passieren würde, wenn man Experimente in einer großen Anzahl wiederholt. Beide Ideen sind bisher selten ein Teil von Einführungskursen zur Statistik. Wir glauben, dass beide Ideen von Lernenden mit geringem oder keinem statistischen Hintergrundwissen verstanden werden können. Außerdem sind wir davon überzeugt, dass eine Kombination von Statistik und ‚Popkultur' Interesse erzeugen kann und die statistischen Themen damit unterhaltsamer macht. Und daher: ‚Möge das Glück stets mit euch sein!'[3]

Anmerkungen

1 Diese Deutung setzt die Annahme voraus, dass es innerhalb der Distrikte gleichviele Jugendliche in jeder Altersklasse gibt (Anm. der Übersetzerin).

2 Ein R-Paket zur Simulation kann unter http://www.mcs.sdsmt.edu/kcaudle/HGames_1.0.tar.gz heruntergeladen werden.

3 Im englischen Original-Roman lautet dieser Satz: „May the odds be forever in your favor." Eine geeignetere Übersetzung wäre also z. B. „Mögen die Chancen stets zu deinen Gunsten sein." Im deutschen Roman und in der Verfilmung wird aber die obige Übersetzung genutzt (Anm. der Übersetzerin).

Literatur

Collins, S. (2010): The Hunger Games Trilogy. Scholastic Australia.

Enders, C. K.; Stuetzle, R. und Laurenceau, J. P. (2006): Teaching random assignment. A classroom demonstration using a deck of playing cards. In: *Technology of Psychology* 34(4), S. 239–242.

Keller, B. (2012): Hunger Games survival analysis. Brett Keller Global Health Development. http://www.bdkeller.com/index.php/writing/hunger-games-survival-analysis/ (Zugriff 1.1.2016).

Marx, M. L.; Larsen, R. J. (2006): Introduction to mathematical statistics and its applications. Pearson/Prentice Hall.

Sawilowsky, S. S. (2005): Teaching random assignment: do you believe it works? In: *Journal of Modern Applied Statistical Methods* 3(1), S. 221–226.

Anschrift der Verfasser

Kyle Caudle
South Dakota School of Mines and Technology
501 East Saint Joseph Street
Rapid City, SD 57701
kyle.caudle@stdsmt.edu

Erica Daniels
erica.daniels@mines.sdsmt.edu